# Vorkurs 1 - Funktionen

---

## Formeln sind Funktionen

Bei der Funktion $y(x) = 1 + x^2$ nennt man $x$ die *Variable*. Wie skizziert man diese Funktion? Man setzt für die Variable Werte ein: $y(0) = 1$, $y(1) = 2$, $y(2) = 5$, ..., $y(\infty) = \infty$. Dann trägt man die Wertepaare $(x, y) = (0, 1)$,$(1, 2)$,$(2, 5)$,... in ein Diagramm ein.
Dann trägt man auf die x-Achse die Werte $0, 1, 2, ...$ auf und trägt senkrecht darüber die dazugehörigen y-Werte auf. Anschließend verbindet man die Punkte.

**Übung:** $y(x) = \frac{1}{x}$ **Lösung:** $y(0) = \infty$, $y(1) = 1$, $y(2) = \frac{1}{2}$,....,$y(\infty) = 0$, *Immer selbst eine Skizze anfertigen, bildlich bleibt alles besser in Erinnerung!*

Die **Physik** verwendet Formeln. Dies sind aber genauso Funktionen. Die Formel:

$$E = \frac{1}{2}mv^2$$

verbindet die Energie (kurz: $E$) mit der Masse (kurz: $m$) und der Geschwindigkeit (kurz: $v$). Was ist hier die Variable?

Das kommt darauf an: fragt man, wie sich die Energie in Abhängigkeit der Geschwindigkeit verhält so ist nach $E(v)$ gefragt. Man setzt dann Werte für $v$ ein und guckt sich an wie $E$ sich verhält. Da $v^2$,wird man qualitativ den Verlauf einer Parabel erhalten (vergleiche: $y(x) = x^2$). Dabei spielt erstmal keine Rolle was $m$ darstellt, man sagt $m$ wird *konstant* gehalten. So kann jede Formel ohne Kenntnis der genauen Größen in ihrem Verlauf beschrieben werden. Ist

$$\Phi = \frac{\pi \Delta p r^4}{8\eta l}$$ [1]

so ändert sich Phi mit $r$ in Form einer steilen Parabel, eben genau mit der 4-ten Potenz zu $r$. Mann kann sogar sagen wie sich $\Phi$ verändert, wenn sich $r$ verdoppelt. $\Phi$ wird $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$-fach größer. Biologisch interessant, da bereits geringfügige Gefäßausdehnungen den Transport von überproprtional viel Blut zulassen. Im folgenden sollte man lediglich drei Funktionen kennen:

- Polynomfunktionen (z.B. $x, x^2, x^3$ usw.)
- Winkelfunktionen (z.B. $\sin(x)$ )
- Exponentialfunktionen (z.B.$e^x$ )

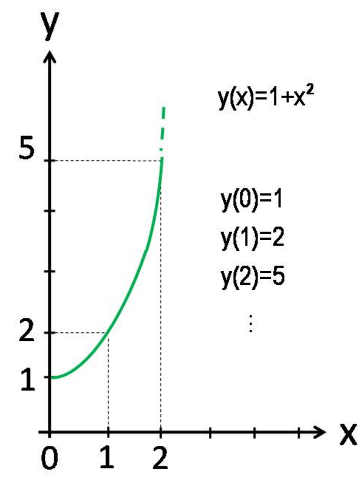



Abbildung 1: Funktion $1 + x^2$: Wertetabelle und Diagramm

[1] Hagen-Poisseulsche Gesetz. Beschreibt die Fähigkeit eine bestimmte Menge Flüssigkeit zu transportieren ($\Phi$=Volumen pro Zeit) in Abhängigkeit vom Rohrradius $r$

# Die Polynomfunktion

## Die lineare Funktion

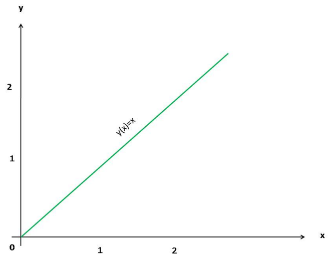
$\boxed{y(x) = x}$

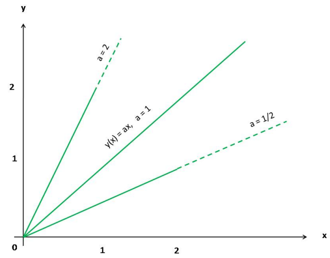
Ist die Winkelhalbierende des Koordinatenkreuzes $x - y$. Man sagt: *$y$ wächst linear oder proportional mit $x$.* Statt $y(x) = x$ kann auch gleichbedeutend $y(x) = x^1$ geschrieben werden. Ein lineares Wachstum hat die Eigenschaft dass, wenn der Wert der Variablen $x$ erhöht wird, sich der Funktionswert $y$ auch um den gleichen Betrag erhöht.

## Die lineare Funktion mit Parameter

$\boxed{y(x) = ax}$

Der Faktor $a$ regelt die Steigung der Geraden. Für $a = 1$ ist es die Winkelhalbierende. Für $a > 1$ entsprechend steilerer Verlauf, für $a < 1$ folgt eine geringere Steigung.




## Die nichtlineare Funktion

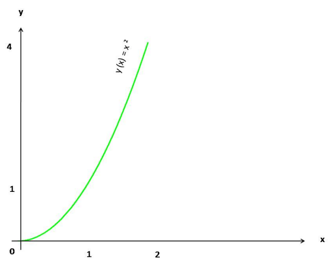
$\boxed{y(x) = x^2}$

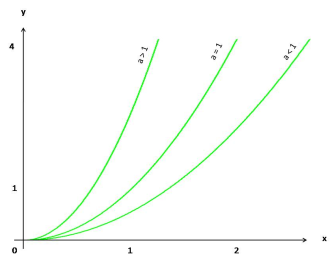
Stellt eine Parabel dar. Man sagt: *$y$ wächst mit der 2-ten Potenz von $x$ oder quadratisch mit $x$.* Übrigens: für alle Polynomfunktionen, die mit höherer Potenz als mit 1 wachsen, sagt man, das sie *nichtlinear oder überproportional wachsen.* Ein quadratisches Wachstum hat die Eigenschaft dass, wenn der Wert der Variablen $x$ verdoppelt wird, der Funktionswert um das 4-fache wächst.

## Die nichtlineare Funktion mit Parameter

$\boxed{y(x) = ax^2}$

Der Faktor $a$ wirkt sich auf die Steigung und Krümmung der Parabel aus. Für $a > 1$ wird die Parabel schneller gegen höhere Funktionswerte gehen, für $a < 1$ langsamer.

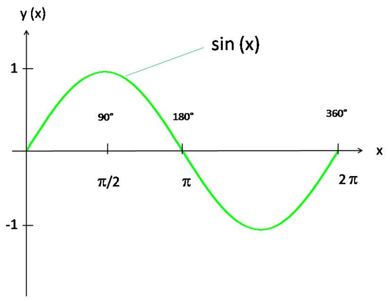


# 1 Die Winkelfunktionen

## Die Sinusfunktion $\boxed{y(x) = \sin(x)}$

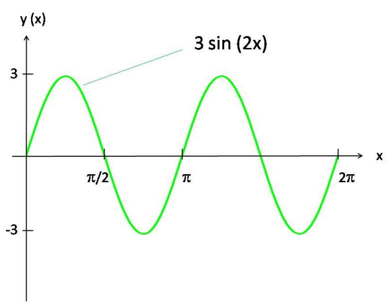
Hier wird $x$ das *Argument* oder *Winkel* genannt. Eine Schwingung läuft von $x = 0$ Grad bis $x = 360$ Grad. Normalerweise wird der Winkel aber im Bogenmaß (rad) abgegeben. Es entspricht 360 Grad dem Bogenmaß $2\pi$ rad. Der Sinus fängt bei Null an und erreicht beim Winkel $x = \pi/2$ rad seine (erste) maximumale Amplitude mit Wert Eins. Auf dem **Taschenrechner** gibt es idR. zwei Einstellungen: *deg* und *rad*. Man überprüfe im Modus rad: $\sin(\pi/2) \approx \sin(3{,}14/2) \approx 1$ und im Modus deg: $\sin(90) = 1$ **!**
Ein genauerer Wert von Pi ist $\pi \approx 3{,}1415926....$

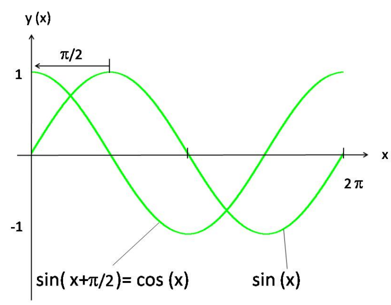



| **Grad deg** | **Bogenmaß rad** |
|---:|---:|
| 360 | $2\pi$ |
| 180 | $\pi$ |
| 90 | $\pi/2$ |
| 45 | $\pi/4$ |

## Die allgemeine Schwingung $\boxed{y(x) = A\sin(Bx + C)}$

Für $A = 1$, $B = 1$, $C = 0$ ist es die Sinusfunktion. Jeder Faktor verändert einen Aspekt im Verlauf der Sinuskurve: $A$ die Amplitude. Ist $A = 3$ so wird die maximale Amplitude beim Funktionswert 3 zu finden sein. $B$ steht für die 'Schnelligkeit' der Schwingung. $B = 2$ verdoppelt die Schwingungen. Im Bereich zwischen $x = 0$ und $2\pi$ finden nun zwei Schwingungen statt. $C$ bewirkt eine Verschiebung der Sinuskurve nach links. $C$ wird auch *Phasenverschiebung* genannt. Eine Phasenverschiebung um $C = \pi/2$ beispielsweise ergibt die Kosinuskurve. Diese hat bei $x = 0$ den Funktionswert Eins.



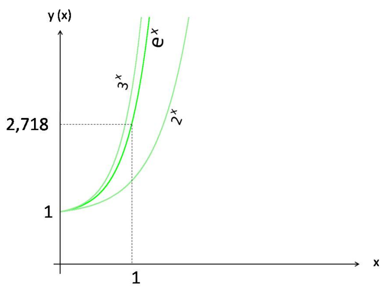
## 2 Die Exponentialfunktion

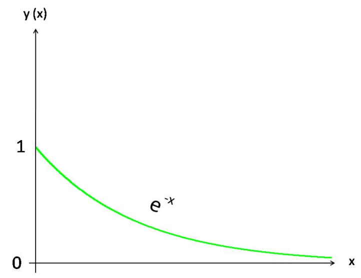
### Die Exponentialfunktion $\boxed{y(x) = e^x}$

Exponentialfunktionen sind Funktionen mit einer Zahl als Basis. So z.B. $2^x$, $3^x$ oder eben $e^x$. Hier ist auch $e$ eine Zahl: $e = 2{,}718281....$ Da jede Zahl hoch Null eins ergibt, beginnt der Graph einer Exponentialfunktion immer bei Eins: $y(0) = e^0 = 1$.

### Die Exponentialfunktion mit negativem Exponenten $\boxed{y(x) = e^{-x}}$

Ein negativer Exponent ist immer gleichbedeutend mit dem Kehrwert der Funktion. $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$. Eine Wertetabelle zeigt, das es sich um eine abfallende Kurve handelt, die sich für große $x$ Null annähert: $y(\infty) \to 0$.

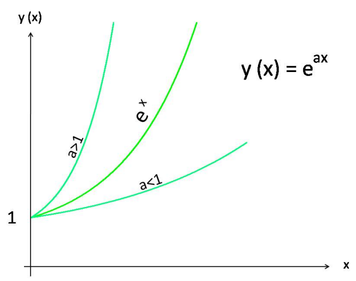


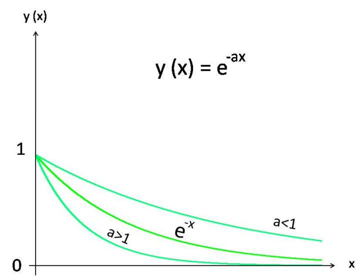




### Die Exponentialfunktion mit Wachstumsrate $\boxed{y(x) = e^{ax}}$

Der Faktor $a$ wird als *Wachstumsrate* oder *Vermehrungsrate* bezeichnet. Die $e-$Funktion tritt auf bei Vorgängen, deren Entwicklung immer schrittweise vom vorherigen Entwicklungsschritt anhängt. Man rechne nach, das 1000 Euro zu 10 Prozent jährlich neu zu: 1100, 1210, 1331 usf. werden und skizziere die Kurve dazu. Die Rate $a$ wäre der Zinsrate. Mit wachsendem $a$ wächst auch die Funktion schneller.

Ist nun $a$ aber negativ, so nennt man $a$ *Sterberate*. Die Funktion wird zur $e-$Funktion mit negativem Exponenten und die geht für große $x$ gegen Null. Ein großes negatives $a$ bedeutet eine große Sterberate und einen schnellen Verlauf der Kurve gegen Null. Bemerkung: Obwohl sich bildlich die Funktionen $y(x) = x^2$ und $y(x) = e^x$




ähnlich zu sein scheinen, haben diese einen unterschiedlichen Verlauf. Eine Wertetabelle für große $x$ verdeutlicht dies. Die Exponentialfunktionen steigen stets schneller an als die Polynomfunktionen.