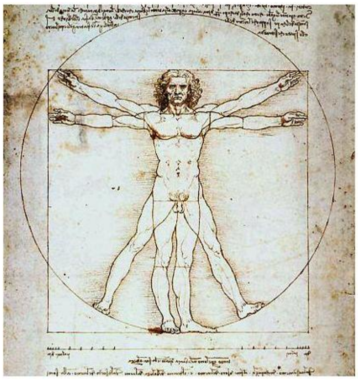
Vorkurs zum Wintersemester 2007/2008



MATHEMATIK

Kurs im September 2007 am Institut für Anorganische Chemie, Universität Hannover. Verfasser Moritz Gardemin, moritz.gardemin@gmx.de

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

1.1 Zahlensysteme

Die Menge der *natürlichen Zahlen* $\mathbb{N}$ ist von *Peano* axiomatisch begründet worden. Die natürlichen Zahlen sind:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}.$$

Aufbauend auf den natürlichen Zahlen erhält man die Menge der *ganzen Zahlen*:

$$\mathbb{Z} = \{..., -4, -3, -2 - 1, 0, 1, 2, 3, ...\},$$

die Menge der *rationalen Zahlen*:

$$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N},\ ggT = 1\},$$

die Menge der *reellen Zahlen* (als Darstellung über unendliche Dezimalbrüche):

$$\mathbb{R} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k 10^k,\ a_k \in \{0, 1, ..., 9\}$$

und die Menge der *komplexen Zahlen*:

$$\mathbb{C} = \{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Bemerkung. Addition und Multiplikation sind in allen Zahlensystemen ausführbar. In $\mathbb{Z}$ ist Subtraktion möglich und in $\mathbb{Q}$ zusätzlich die Division. (Achtung: nicht durch "0"dividieren). In $\mathbb{R}$ gelten alle vorstehenden bekannten Rechenregeln. In $\mathbb{C}$ ist $i^2 := -1$ definiert. Es gilt:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Beispiel. $\{\sqrt{2}, e, \pi\} \subset \mathbb{R}$, aber $\{\sqrt{2}, e, \pi\} \not\subset \mathbb{Q}$. D.h. $\sqrt{2}, e$ und π sind nicht in der Form $\frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}$ darstellbar.

Übungen 1.1.

$a)$ ☐	$b)$ ☐	$c)$ ☐
$d)$ ☐	$e)$ ☐	$f)$ ☐

1.2 Folgen und Reihen

1.2.1 Folgen

Definition. Eine (Zahlen-) Folge ist eine endliche oder unendliche Menge $a_1, a_2, a_3, ... \in \mathbb{R}$ die in einer bestimmten Reihenfolge angeordnet sind. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ wird als unendliche Folge, $(a_n)_{n=1}^{N}$, $N \in \mathbb{N}$ als endliche Folge bezeichnet. Folgende Bezeichnungen gelten:

- $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ heißt *beschränkt*, sofern $\exists c > 0 \; \forall n \in \mathbb{N}: \; |a_n| \leq c$.
- $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ heißt *konvergent*, wenn $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass $\forall n \geq n_0 : | \; a_n - a \; | < \varepsilon$. Dabei wird $a \in \mathbb{R}$ als Grenzwert oder Limes bezeichnet. Das eine Folge (a_n) konvergent gegen ihren Grenzwert a ist wird als
$$a_n \to a \text{ für } n \to \infty, \quad \text{oder} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = a$$
geschrieben.
- Ist eine Folge nicht konvergent, so heißt sie *divergent*.
- $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ heißt *bestimmt* divergent, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} = \pm\infty$.
- $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ heißt *streng monoton wachsend* , wenn
$$a_1 < a_2 < a_3 ... < a_n$$
und *streng monoton fallend*, wenn
$$a_1 > a_2 > a_3 ... > a_n.$$

Beispiele. Wichtige Grenzwerte von Folgen sind

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} \to 1$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \to 1$
- $(\frac{n+1}{n})^n = (1 + \frac{1}{n})^n \to e$
- $(1 + \frac{x}{n})^n \to e^x$
- $(1 - \frac{x}{n})^n \to e^{-x}$

Übungen 1.2.1.

a) $\square$	*b)* $\square$	*c)* $\square$
d) $\square$	*e)* $\square$	*f)* $\square$

1.2.2 Reihen

Definition. Seien $a_0, a_1, a_2, ... \in \mathbb{R}$, dann heißt

$$S = \sum_{j=0}^{\infty} a_j := a_0 + a_1 + a_2 + ...$$

unendliche Reihe. Die unendliche Reihe ist definiert als Folge ihrer Partialsummen:

$$S_N = \sum_{j=0}^{N} a_j, \;\; j \in \mathbb{N}.$$

Beispiel. Die unendliche Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} j$ bildet die Folge ihrer Partialsummen: $1, 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4, ...$ Konvergiert die Partialsummenfolge, so heißt die unendliche Reihe konvergent. Divergiert die Partialsummenfolge so heißt die unendliche Reihe divergent. Der *Grenzwert* einer unendlichen Reihe ist der Grenzwert ihrer Partialsummenfolge:

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j := \lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=0}^{N} a_j$$

Beispiel. Die unendliche Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} j$ besitzt die Partialsumme

$$S_N = 1 + 2 + 3 + ... + (N-1) + N = \frac{N(N+1)}{2}, \;\; N \in \mathbb{N}.$$

Nun ist aber

$$\lim_{N\to\infty} = \frac{N(N+1)}{2} \to \infty.$$

Die Reihe ist daher divergent, weil ihre Partialsummenfolge keinen endlichen Grenzwert besitzt. Im folgenden werden wichtige Reihen und Ihre Grenzwerte aufgeführt:

- Die *endliche geometrische Reihe* ist durch

  $$\sum_{j=0}^{N} q^j = 1 + q + q^2 + ... + q^N = \frac{1 - q^{j+1}}{1-q}, \;\; q \neq 1$$

  gegeben. Die unendliche geometrische Reihe konvergiert genau dann, wenn $|q| < 1$. Dann ist

  $$\sum_{j=0}^{\infty} q^j = 1 + q + q^2 + ... = \frac{1}{1-q}, \;\; |q| < 1.$$

- Die *harmonische Reihe*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^\alpha} = \frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + ...$$

  ist konvergent für $\alpha > 1$.

Konvergenzkriterien. Ein *notwendiges* Kriterium, dafür das eine unendliche Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ konvergent ist, ist $\lim_{j\to\infty} a_j = 0$. Die Folge der Glieder der unendlichen Reihe müssen also eine *Nullfolge* bilden.

Beispiel.

$$\sum_{j=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{j})^j$$

ist divergent, da der Limes der Folgeglieder gemäß

$$\lim_{j\to\infty} a_j = \lim_{j\to\infty} (1 + \frac{1}{j})^j \to e$$

keine Nullfolge bildet. Das ein Kriterium notwendig ist, sagt nur aus, daß es gelten muss bevor weitere Kriterien zur Konvergenzuntersuchung herangezogen werden. Konvergenzkriterien sind u.a. *Leibniz-*, *Quotienten-* und *Wurzelkriterium* (s. Literatur).

Rechenregeln für Reihen. Unter der Voraussetzung, daß zwei Reihen $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ und $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ konvergent sind, gilt die komponentenweise Addition

$$\sum_{j=0}^{\infty} (a_j + b_j) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j + \sum_{j=0}^{\infty} b_j$$

und die komponentenweise Multiplikation

$$\sum_{j=0}^{\infty} r a_j = r \sum_{j=0}^{\infty} a_j.$$

Übungen 1.2.2.

$a)$ □	$b)$ □	$c)$ □
$d)$ □	$e)$ □	$f)$ □

1.2.3 Die Taylorreihe

Definition. Sei f eine Funktion, die im Punkt x_0 mindestens j-mal *differenzierbar* ist, so heißt

$$T_N(x) = \sum_{j=0}^{N} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j = f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(N)}(x_0)}{N!}(x-x_0)^N$$

das *Taylorpolynom* N-ten Grades von f um den *Entwicklungspunkt* x_0. Ist die Reihe unendlich und wird die anzunähernde Funktion $f(x)$ durch die Taylorreihe um x_0 exakt dargestellt, so heißt

$$f(x) = T(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j$$

Taylorreihe von f um x_0. Nähert die Taylorreihe die Funktion $f(x)$ nicht exakt an, sondern bricht vorher ab, so heißt

$$R_N(x) = f(x) - T_N(x)$$

N-tes *Restglied* der Taylorentwicklung von f um x_0. Das Restglied kann beispielsweise durch die Restglieddarstellung von Lagrange berechnet werden:

$$R_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}(x - x_0)^{N+1},$$

mit einem ξ zwischen a und x.

Übungen 1.2.3.

a) ☐	*b)* ☐	*c)* ☐
d) ☐	*e)* ☐	*f)* ☐

1.3 Funktionen

1.3.1 Definition von Funktionen

Definition. Seien X und Y zwei (nichtleere) Mengen und $x \in X$ und $y \in Y$. Dann bezeichnet:

$$f : X \to Y$$

eine Funktion f, wenn jedem x eindeutig ein y zugeordnet wird. X wird als Definitionsbereich (auch als D_f) bezeichnet, Y als Wertebereich (auch W_f). $y = f(x)$ heißt der Wert der Funktion an der Stelle x.

Bemerkung $y = f(x)$ wird auch das *Bild von* x unter der Funktion f und x das *Urbild von* $f(x)$ genannt. Definitions-und Zielbereich von Funktionen müssen festgelegt werden, um eine Funktion vollständig zu beschreiben. Im übrigen sind alle elementaren Funktionen (die bekannten wie $\sin x, \cos x, \tan x, e^x$, usw.) auf Ihrem Definitions-und Wertebereich *stetig*.

Beispiele. (a) Für die Normalparabel $f : x \to x^2$ gilt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
(b) $f : x \to \frac{1}{1+x^2}$. Hier ist $f : D_f \to W_f : \ \ f : \mathbb{R} \to]0, 1]$.

Die Intervalle des Definitions- oder Wertebereichs werden wie folgt bezeichnet:

- [.]: geschlossenes Intervall
-] . [: offenes Intervall ("keine Endpunkte")
-] .]: linksoffenes Intervall
- [. [: rechtsoffenes Intervall

Übungen 1.3.1.

a) ☐	*b)* ☐	*c)* ☐
d) ☐	*e)* ☐	*f)* ☐

1.3.2 Ganze rationale Funktionen

Definition. Ganze rationale Funktionen sind reelle Polynome:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n, \ \ a_0...a_n \in \mathbb{R}$$

Bemerkung $a_0, ..., a_n$ sind die *Koeffizienten* und a_0 das *absolute Glied* . Der höchste Exponent von x bei dem $a_n \neq 0$ ist, heißt *Grad* des Polynoms.

Diejenigen x welche die Gleichung $f(x) = 0$ lösen werden *Nullstellen* des

Polynoms genannt. Sind alle Nullstellen eines Polynoms bekannt, so kann dieses [1] als Produkt seiner *Linearfaktoren*

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n = (x - x_n)(x - x_{n-1}) \cdot ... \cdot (x - x_2)(x - x_1)$$

dargestellt werden, wobei $x_1, ..., x_n$ die Nullstellen des Polynoms sind mit $x_1, ..., x_n \in \mathbb{C}$.

Beispiele. (1) $f(x) = x^2 + x - 2$ ist eine ganze rationale Funktion 2-ten Grades. $a_0 = -2, a_1 = 1, a_2 = 1$. Nullstellen bei $x_1 = 1, x_2 = -2 \Rightarrow f(x) = (x-1)(x+2)$. Dies ist die Darstellung der Funktion in Ihren Linearfaktoren. (2) $f(x) = x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1)$. (3) $f(x) = x^3 + 3x - 4 = (x-1)(x^2+x+4)$. Die Nullstelle bei $x_1 = 1$ ist durch ausprobieren zu erhalten.

Bei Polynomen vom Grad > 2 kann bei bekannten Nullstellen durch die Linearfaktoren geteilt werden um ein Polynom geringeren Grades zu erhalten. Der Verlauf des Graphen der Funktion kann durch Grenzwertbetrachtung erhalten werden.

Übungen 1.3.2.

a) ☐	*b*) ☐	*c*) ☐
d) ☐	*e*) ☐	*f*) ☐

1.3.3 Gebrochen rationale Funktionen

Definition. Seien $p(x), q(x)$ zwei Polynome in $\mathbb{R}$ und $q(x)$ ist nicht das Nullpolynom, so heißt

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

Gebrochen rationale Funktion. Ist *Grad* $p(x) <$ *Grad* $q(x)$ so heißt die Funktion $f(x)$ *echt gebrochen* anderenfalls *unecht gebrochen.* Definitionsbereich von $f(x)$ ist $D_f\{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$.

Bemerkung. Vorgehensweise: (1) unecht gebrochene Funktionen werden durch Polynomdivision zerlegt. (2) Nullstellen des Zählers und des Nenners

[1] nach dem Wurzelsatz von Vieta

bestimmen und $q(x)$ und $p(x)$ in Linearfaktoren zerlegen; ggf. im Zähler und Nenner vorhandene gleiche Linearfaktoren kürzen. (3) Nullstellen im Zähler sind Nullstellen. Nullstellen im Nenner sind Polstellen. Graphische Darstellung durch Grenzwertbetrachtung. Zusätzlich kann der $y-$ Achsenabschnitt durch $f(0)$ ermittelt werden

Beispiel. $f(x) = \frac{x^2 - \frac{3}{2} - 1}{x^3 - \frac{13}{2}x^2 + \frac{17}{2}x + 6}$

Lösung: (1) Es handelt sich um eine echt gebrochen rationale Funktion, $p(x) < q(x)$. (2) Nullstellen von $p(x)$ mittels *p-q-Formel* sind $x_{p_1} = 2$, $x_{p_2} = -\frac{1}{2}$. Eine Nullstelle von $q(x)$ muss bekannt sein ("raten", numerische Verfahren). Hier ist z.B. $x_{q_1} = 3$.

Jetzt kann $q(x)$ auf eine quadratische Form reduziert werden, in dem durch den bekannten Linearfaktor geteilt wird:

$$x^3 - \frac{13}{2}x^2 + \frac{17}{2}x - 6 : x - 3 = x^2 - \frac{7}{2}x - 2.$$

Die quadratische Form wird mittels p-q-Formel gelöst sodass die Nullstellen von $q(x)$ vollständig bestimmt sind: $x_{q_1} = 3, x_{q_2} = 4, x_{q_3} = \frac{1}{2}$. In Linearfaktoren zerlegt ist

$$f(x) = \frac{(x + \frac{1}{2})(x - 2)}{(x + \frac{1}{2})(x - 3)(x - 4)} = \frac{x - 2}{(x - 3)(x - 4)},$$

für $x \neq -\frac{1}{2}$ (Unstetigkeitsstelle) (3) Nullstelle der Funktion ist $x = 1$. Die Funktion ist bei $x = 3$ und $x = 4$ nicht definiert (Polstellen). $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \to 0^-, \lim\limits_{x \to} f(x) \to 0^+$. $y-$ Achsenabschnitt ist $f(0) = -\frac{1}{6}$.

Übungen 1.3.3.

a) ☐	*b)* ☐	*c)* ☐
d) ☐	*e)* ☐	*f)* ☐

1.3.4 Trigonometrische Funktionen

Definition der Winkelfunktionen über ein Dreieck im Einheitskreis:

$$\sin \alpha = \frac{GK}{H}$$

$$\cos\alpha = \frac{AK}{H}$$
$$\tan\alpha = \frac{GK}{AK}$$
$$\cot\alpha = \frac{AK}{GK}$$

Funktionswerte der Winkelfunktionen

Funktion/Grad	$0°$	$45°$	$90°$	$135°$	$180°$	$225°$	$270°$	$315°$	$360°$
	0	$\frac{pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\tan\alpha$	0	1	$\pm\infty$	-1	0	1	$\pm\infty$	-1	0
$\cot\alpha$	$\pm\infty$	1	0	-1	$\pm\infty$	1	0	-1	$\pm\infty$

Eigenschaften der Winkelfunktionen

- $\cos(-x) = \cos(x)$ (*gerade Funktion*)
- $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha), \tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$ und $\cot(-\alpha) = -\cot(\alpha)$ (*ungerade Funktionen*)
- $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha$, $\cos(\alpha + k2\pi) = \cos\alpha,\ k \in \mathbb{Z}$. (*Periode* 2π)
- $\tan(\alpha + \pi) = \tan\alpha$, $\cot(\alpha + k\pi) = \cot\alpha,\ k \in \mathbb{Z}$. (*Periode* π)
- $A\sin(\alpha)$: Faktor A um den die Amplitude verschoben wird
- $\sin(\alpha + x)$: Verschiebung in Richtung $-x$
- $\sin(a\alpha)$: Streckung von $\frac{1}{a}$ in $x-$ Richtung

Trigonometrische Formeln

$\sin(\alpha \pm \beta)$	$=$	$\sin\alpha\cos\beta \mp \cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha \pm \beta)$	$=$	$\cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$
$\sin\alpha\sin\beta$	$=$	$\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$
$\cos\alpha\cos\beta$	$=$	$\frac{1}{2}(\cos\alpha - \beta + \cos(\alpha+\beta))$
$\sin\alpha\cos\beta$	$=$	$\frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)$
$\sin^2\alpha$	$=$	$\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$
$\cos^2\alpha$	$=$	$\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$	$=$	1
$\sin n\alpha$	$=$	$n\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha + \binom{n}{5}\cos^{n-5}\alpha\sin^5\alpha \mp \ldots$
$\cos n\alpha$	$=$	$\cos^n\alpha - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\alpha\sin^4\alpha \mp \ldots$

[2]

Übungen 1.3.4.

a) ☐	*b)* ☐	*c)* ☐
d) ☐	*e)* ☐	*f)* ☐

1.3.5 Umkehrfunktion, Arcus-Funktionen

Im folgenden seien X, Y Teilmengen von $\mathbb{R}$.

Definition. Sei $f : X \to Y$ eine *bijektive* Funktion, dann heißt $f^{-1} : Y \to X$ die Umkehrfunktion von f.

Definition. Eine Funktion (oder Abbildung) $f : X \to Y$ heißt *bijektiv* falls es zu jedem $y \in Y$ ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt.

Beispiele. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit

1. $f(x) = 2x - 3$, so ist $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$
2. Ist $f(x) = x^2$, so besitzt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ keine Umkehrfunktion, da f nicht bijektiv ist. Ist hingegen $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, so ist f bijektiv und ihre Umkehrfunktion ist $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

Bemerkung. Perodische Funktionen (und damit die trigonometrischen Funktionen) sind auf Ihrem gesamten Definitionsbereich nicht umkehrbar und

[2]für $n \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

müssen auf einen Definitionsintervall, ihre sogenannten *Monotonieintervalle* eingeschränkt werden.

Arcus-Funktionen

f(x)	Monotonieintervall	$f^{-1}(x)$	Abbgebildet auf
$\sin x$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$\arcsin x$	$[-1, 1]$
$\cos x$	$[0, \pi]$	$\arccos x$	$[-1, 1]$
$\tan x$	$x \in \mathbb{R}$	$\arctan x$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$\cot x$	$[0, \pi]$	$\text{arccot } x$	$x \in \mathbb{R}$

Beispiele. Graphen des Arcus-Sinus, Arcus-Cosinus, Arcus-Tangens, Arcus-Cotangens.

Übungen 1.3.5.

a) $\square$ *b)* $\square$ *c)* $\square$

d) $\square$ *e)* $\square$ *f)* $\square$

1.3.6 Exponential -und Logarithmusfunktion

Definition. Sei $a^x,\ x \in \mathbb{N}$ eine *Exponentialfunktion*, so heißt a die Basis und x der Exponent. Ist $x \in \mathbb{Q}$ derart das $x = \frac{p}{q},\ \ p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}$, so wird die Funktion als die *q-te Wurzel aus a hoch p* bezeichnet.

Rechenregeln für Exponentialfunktionen. Es seien $a, b, x, y \in \mathbb{R},\ a > 0,\ b > 0$, so sind folgende Rechenregeln erlaubt:

1. $a^x a^y = a^{x+y}$
2. $a^{x^y} = a^{xy}$
3. $a^x b^x = ab^x$
4. $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

Weiterhin gibt es für $x > 0,\ a \neq 1$ genau ein $y \in \mathbb{R}$ mit $a^y = x$. Somit gibt es folgende Umkehrfunktion:

Definition. Für $x > 0,\ a \neq 1$ ist

$$y = \log_a x \Longleftrightarrow x = a^y.$$

Man nennt y den *Logarithmus von x zur Basis a.*

Eigenschaften des Logarithmus. Seien $b > 0,\ c > 0,\ 1 \neq a > 0,\ x \in \mathbb{R}$, so gelten folgende Eigenschaften:

- $x = a^y = a^{log_a x}$
- $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$
- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a = 1$
- $\log_a x^c = c \log_a x$
- $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$

Bemerkung. Spezialfälle sind der dekadische Logarithmus zur Basis $a = 10$ und der natürliche Logarithmus zur Basis $b = 10$. Schreibweise ist $\log_{10} x =:$ $\lg x$ und $\log_e x =: \ln x$.

Weitere wichtige, aus obigem folgende Eigenschaften sind

- $f(x) = a^x = e^{x \ln a}$
- $\ln e^x = x$

Übungen 1.3.6.

$a)$ $\square$	$b)$ $\square$	$c)$ $\square$
$d)$ $\square$	$e)$ $\square$	$f)$ $\square$

1.3.7 Die e-Funktion

Die $e-$Funktion wird für alle $x \in \mathbb{R}$ über die konvergente Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... =: e^x$$

definiert. Als weitere Definition kann für $n \in \mathbb{N}$ der Grenzwert der Folge

$$\lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$$

benutzt werden. Die *Ableitung* der $e-$Funktion ist die $e-$Funktion selbst. Sie ist unendlich oft differenzierbar. Die Umkehrfunktion von $f(x) = e^x$ ist $y = \ln x$, für $x > 0$.

Übungen 1.3.7.

$a)$ ☐	$b)$ ☐	$c)$ ☐
$d)$ ☐	$e)$ ☐	$f)$ ☐

1.4 Komplexe Zahlen

1.4.1 Kartesiche Darstellung

Erweitert man den Körper der reellen Zahlen um eine Dimension, so erhält man den Körper $\mathbb{R}^2$, der aus der Gesamtmenge der Zahlenpaare (x, y) besteht, mit $x, y \in \mathbb{R}$.

Definition. Als *imaginäre Einheit* wird

$$i := (0, 1)$$

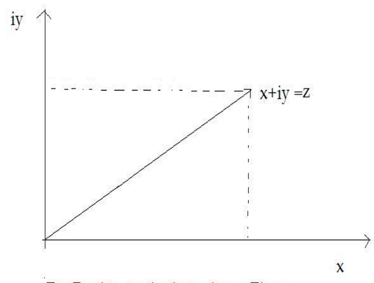
bezeichnet und es gilt

$$i^2 = (-1, 0).$$

Dies ermöglicht die Darstellung als

$$(x, y) = x + iy =: z,$$

wobei $x =: \mathcal{R}(z)$ *Realteil* von z und $y := \mathcal{I}(z)$ *Imaginärteil* von z heißt. In $\mathbb{C}$ können Multiplikation und Addition wie in $\mathbb{R}$ durchgeführt werden.



Ein Punkt z in der komplexen Ebene

Übungen 1.4.1.

$a)$ ☐	$b)$ ☐	$c)$ ☐
$d)$ ☐	$e)$ ☐	$f)$ ☐

1.4.2 Darstellung in Polarkoordinaten

Da jeder Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ unter Angabe eines Wertepaares vollständig lokalisiert werden kann, ist eine Koordinatenumformung $(x, y) \to (r, \varphi)$ erlaubt. Es gilt

$$x = rcos\varphi$$
$$y = rsin\varphi,$$

wobei r der Abstand des Punktes (x, y) zum Koordinatenursprung $(0, 0)$ und φ der Winkel zwischen r und $x-$Achse ist. Wir erhalten:

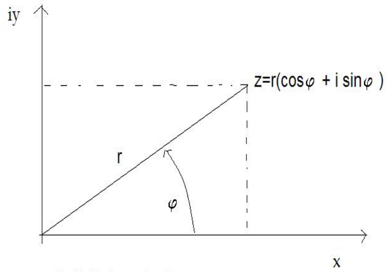
$$z := rcos\varphi + risin\varphi.$$

(r, φ) heißen *Polarkoordinaten* von z mit $|z| = r$. Eine kürzere und oft sinnvollere Schreibweise ist die *Eulersche Darstellung* mittels

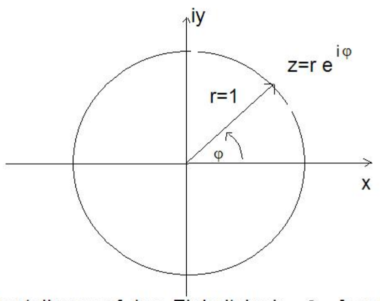
$$e^{i\varphi} = cos\varphi + isin\varphi.$$

und damit

$$z = re^{i\varphi} = r(cos\varphi + isin\varphi).$$



z in Polarkoordinaten



Eulerdarstellung auf dem Einheitskreis. [φ]: rad

Übungen 1.4.2.

$a)$ ☐	$b)$ ☐	$c)$ ☐
$d)$ ☐	$e)$ ☐	$f)$ ☐

1.4.3 Multiplikation und Division in $\mathbb{C}$

Addition, Multiplikation und Division folgen in $\mathbb{C}$ den Rechenregeln wie für $\mathbb{R}$. Für Polarkoordinaten bzw. in der Eulerdarstellung wie folgt: Seien $z, w \in \mathbb{C}$, $|z| = r$, $|w| = s$, so gilt für die Multiplikation:

$$z \cdot w = re^{i\varphi}se^{i\psi} = rse^{i(\varphi+\psi)}$$

und für die Division

$$\frac{z}{w} = \frac{re^{i\varphi}}{se^{i\psi}} = \frac{r}{s}([cos(\varphi + \psi) + isin(\varphi + \psi)].$$

Übungen 1.4.3.

a) ☐	*b*) ☐	*c*) ☐
d) ☐	*e*) ☐	*f*) ☐

2 Differentialrechnung

2.1 Differentation in einem Punkt

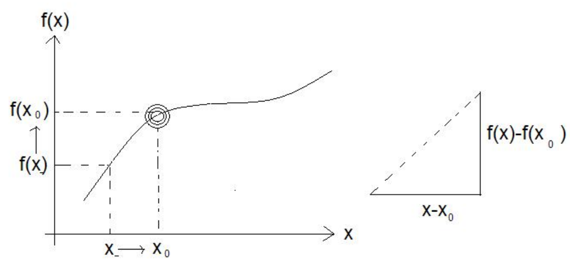
Definition. Es sei f eine reelle Funktion auf (a, b) und sei x_0 ein Punkt $x_0 \in (a, b)$. f heißt im Punkt x_0 *differenzierbar* sofern der *rechtsseitige* und *linksseitige* Grenzwert

$$\lim_{x_+ \to x_0} \frac{f(x_+) - f(x_0)}{x_+ - x_0} = \lim_{x_- \to x_0} \frac{f(x_-) - f(x_0)}{x_- - x_0} = \alpha$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$ existiert. Schreibweise ist

$$\alpha = \frac{df}{dx}(x_0) = f'(x_0),$$

wobei $f'(x_0)$ die erste *Ableitung* an der Stelle x_0 genannt wird.



Differentation im Punkt x_0

Bemerkung. Aus der Differenzierbarkeit von f in x_0 folgt stets die *Stetigkeit* von f in x_0. Aus der Stetigkeit in f an der Stelle x_0 aber nicht die Differenzierbarkeit von f in x_0.

Beispiel. $f(x) = |x|$.

Übungen 2.1.

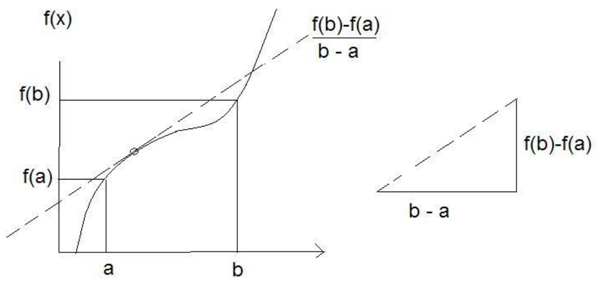
$a)$ $\square$	$b)$ $\square$	$c)$ $\square$
$d)$ $\square$	$e)$ $\square$	$f)$ $\square$

2.2 Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Mittelwertsatz der Differentialrechnung. Es sei f auf $[a,b]$ stetig und auf $]a,b[$ differenzierbar. Dann existiert ein $x_0 \in]a,b[$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Ein spezieller Fall des Mittelwertsatzes ist der **Satz von Rolle:** Sind die



Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Voraussetzungen des Mittelwertsatzes erfüllt und ist $f(a) = f(b) = 0$, so existiert ein $x_0 \in (a,b)$ mit

$$f'(x_0) = 0.$$

Übungen 2.2.

$a)$ $\square$	$b)$ $\square$	$c)$ $\square$
$d)$ $\square$	$e)$ $\square$	$f)$ $\square$

2.3 Differentationsregeln

Ableitungen von Polynomen werden mittels der *Potenzregel*

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1},\ n \in \mathbb{R}$$

durchgeführt. Weiterhin gelten folgende Rechenregeln die Differentation von Funktionen:

- **Summenregel.** Seien f, g in x_0 differenzierbare Funktionen und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so gilt

  $$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$$

  Beispiel:

  $$f(x) = 3x^2 + 2x^3.$$

  Hier ist $\alpha f = 3x^2$ und $\beta g = 2x^3$.

- **Produktregel.** Seien f, g in x_0 differenzierbare Funktionen, so ist $f \cdot g$ differenzierbar in x_0 mittels

  $$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0).$$

  Beispiel:

  $$x sin x.$$

  Es ist $f = x$ und $g = sinx$.

- **Quotientenregel.** Seien f, g in x_0 differenzierbare Funktionen mit $g(x_0) \neq 0$. So ist auch $\frac{f}{g}$ in x_0 differenzierbar mittel

  $$(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

  Beispiel:

  $$\frac{x}{e^x},$$

  mit $f = x$ und $g = e^x$.

- **Kettenregel.** Seien f, g in x_0 differenzierbare Funktionen. Ist weiterhin $h = g \circ f$ eine *Verkettung* der Funktionen und existiert $g'(f(x_0))$, so ist h in x_0 differenzierbar mittels

  $$h'(x_0) = (g \circ f)(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

  Beispiel:

  $$(2x^2 + 1)^5.$$

  Es ist $h = (2x^2 + 1)^5$, wobei $f = 2x^2 + 1$ und $g(f) = (f)^5$.

- **Logarithmische Ableitung.** Sei f eine in x_0 differenzierbare Funktion und $f(x_0) > 0$, so gilt für Logarithmen der Art $h(x) = \ln f(x)$:

$$h'(x_0) = \frac{f'(x_0)}{f(x_0)}.$$

  Beispiel:

$$\ln x^2,$$

  mit $f = x^2$.

Bemerkung. Im Kapitel Integrationsrechnung sind einige Funktionen und Ihre Ableitungen aufgeführt.

Übungen 2.3.

a) ☐	*b)* ☐	*c)* ☐
d) ☐	*e)* ☐	*f)* ☐

2.4 Der Satz von l´Hospital

Der *Satz von l´Hospital:* Seien f, g zwei Funktionen, die in einer *Umgebung* von x_0 differenzierbar sind so gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)},$$

sofern diese Grenzwerte existieren.

Übungen 2.4.

a) ☐	*b)* ☐	*c)* ☐
d) ☐	*e)* ☐	*f)* ☐

2.5 Höhere Ableitungen

Definition. Die Funktion f sei auf ganz $]a,b[$ differenzierbar und sei $x_0 \in]a,b[$. Falls der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \beta$$

existiert, so heißt $\beta = f''(x_0)$ die *zweite Ableitung* von f in x_0. Schreibweise ist

$$\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0) = f''(x_0).$$

Für $n \in \mathbb{N}$ wird die *n-te Ableitung* von f in x_0 definiert:

$$\frac{d^n f}{dx^n} = f^{(n)}(x_0).$$

Übungen 2.5.

a) ☐	*b)* ☐	*c)* ☐
d) ☐	*e)* ☐	*f)* ☐

3 Integration

3.1 Treppenfunktionen

Definition. Eine endliche Folge $(a_0, a_1, ..., a_0)$ heißt *Zerlegung* von $[a,b]$, wenn

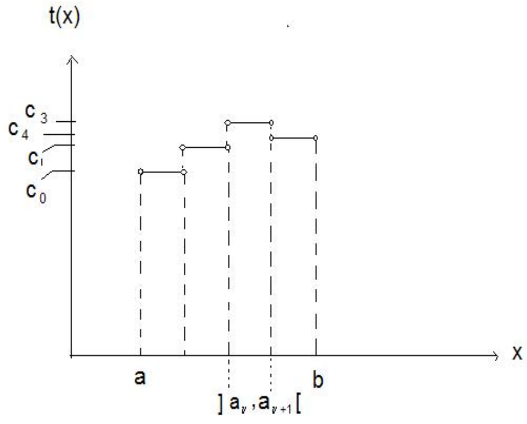
$$a_0 < a_1 < ... < a_{n-1} < a_n$$

mit $a_0 = a$ und $a_n = b$ gilt.

$$t : [a,b] \to \mathbb{R}$$

heißt *Treppenfunktion* auf $[a,b]$, wenn es eine Zerlegung von $[a,b]$ gibt, so daß t auf jedem Teilintervall $]a_\nu, a_{\nu+1}[$ konstant ist. Der Inhalt einer (nichtnegativen) Treppenfuntion ist gegeben durch

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} c_\nu (a_{\nu+1} - a_\nu) := \int_a^b t(x)dx,$$



Zerlegung in [a,b] und Treppenfunktion t(x)

wobei c_ν die mittels $t(x)$ abgebildeten Ordinatenwerte zu a_ν bzw. $a_{\nu+1}$ sind.

Definition. Eine Treppenfunktion $t : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt *obere* Treppenfunktion von $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, wenn

$$t(x) \geq f(x), \quad \forall\, x \in [a, b]$$

gilt. Sie heißt *untere* Treppenfunktion , wenn

$$t(x) \leq f(x), \quad \forall x \in [a, b]$$

gilt.

Bemerkung. Jede *beschränkte* Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ besitzt eine obere und untere Treppenfunktion.

Übungen 3.1.

a) □	*b)* □	*c)* □
d) □	*e)* □	*f)* □

3.2 Das Riemann Integral

Definition. (i) Stimmen für beschränkte Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Ober und Untersumme der Treppenfunktionen überein, so heißt f *Riemann inte-*

grierbar auf $[a, b]$. Der gemeinsame Wert wird als

$$\int_a^b f(x)dx$$

geschrieben. und heißt *Riemann Integral.*
(ii) Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann integrierbar, wenn es zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ eine obere und eine untere Treppenfunktion t_0 und t_u gibt, so daß das folgende *Riemann Kriterium*

$$\int_a^b t_o(x)dx - \int_a^b t_u dx < \varepsilon$$

gilt. Das Riemann Integral stellt also die Fläche unter dem Graphen der Funktion f dar.

Rechenregeln: Sind f und g auf $[a, b]$ entsprechend definierte Funktionen, so gilt:

- $\int\limits_a^b (f + g)(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx$
- $\int\limits_a^b cf(x)dx = c \int\limits_a^b dx, \quad c \in \mathbb{R}$
- $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx, \quad a \leq c \leq b$
- $\int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b g(x)dx, \quad \Leftrightarrow f(x) \leq g(x), \ \forall x \in [a, b]$
- $\int\limits_a^b f(x) = -\int\limits_b^a f(x)dx$
- $\int\limits_a^a := 0$

Übungen 3.2.

a) ☐	*b)* ☐	*c)* ☐
d) ☐	*e)* ☐	*f)* ☐

3.3 Hauptsatz der Differential und Integralrechnung

Die Berechnung einer Fläche unter einer Funktion f mittels Treppenfunktionen ist nicht üblich und teils unmöglich. Der *Hauptsatz* der Differential und Integralrechnung zeigt, das die Integration die Umkehrung der Differentation ist.

Definition. Eine Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion* zu $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, wenn

$$F' = f$$

gilt.

Hauptsatz der Diferrential und Integralrechnung: Gibt es zu einer Riemann integrierbaren Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion F, so gilt

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a) =: F(x)|_a^b$$

Bemerkung. Jede stetige Funktion besitzt eine Stammfunktion.

Übungen 3.3.

$a)$ ☐	$b)$ ☐	$c)$ ☐
$d)$ ☐	$e)$ ☐	$f)$ ☐

3.4 Das unbestimmte Integral

Aus dem Hauptsatz folgt, daß die Integration eine Umkehrung der Differentation ist. Sei nun f eine Funktion, so folgt

$$\frac{d}{dx} \int f(x)dx = f(x)$$

und

$$\int \frac{df(x)}{dx} dx = f(x) + C,$$

wobei C *Integrationskonstante* heißt. Im ersten Fall wurde vorausgesetzt, daß f überhaupt auf I eine Stammfunktion besitzt, im zweiten Fall, daß f auf I differenzierbar ist. Im folgenden sind einige Integrale und Ihre Stammfunktionen aufgeführt:

- $\int dx = x + C$

- $\int a dx = ax + C$
- $\int x^r dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C$
- $\int e^x = e^x + C$
- $\int \cos x = \sin x + C$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| \; dx$

3.5 Integrationsverfahren

3.5.1 Substitutionsregel

Seien $f(x)$ und $g(t)$ stetige Funktionen und sei $x = g(t)$ unkehrbar mit der Umkehrfunktion $t = g^{-1}(x)$ so gilt

$$\frac{d}{dx} t = \frac{d}{dx} g^{-1}(x) \Rightarrow \frac{1}{\frac{d}{dx} t} = \frac{1}{\frac{d}{dx} g^{-1}(x)} \Rightarrow \frac{d}{dt} x = \frac{1}{\frac{d}{dx} g^{-1}(x)}$$

und

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} g(t).$$

Gleichsetzen beider Ergebnisse führt auf

$$\frac{d}{dt} g(t) = \frac{1}{\frac{d}{dx} g^{-1}(x)}.$$

So kann folgende Integralgleichung begründet werden, die als *Substitutionsregel* bezeichnet wird

$$\int f(x) \; dx = \int f \underbrace{(g(t))}_{x} \cdot \underbrace{g'(t) \; dt}_{dx}.$$

Beispiel. $\int f(x) dx = \int (1 - 2x)^5 \; dx$. **Vorgehen:**

1. Substitution: $g^{-1}(x) = t = 1 - 2x$. Es folgt $\frac{d}{dx} t = -2 \Rightarrow dx = -\frac{1}{2} dt$
2. Einsetzen: $\int t^5 (-\frac{1}{2}) dt = -\frac{1}{2} \int t^5 \; dt$
3. Lösen: $-\frac{1}{2} \int t^5 \; dt = -\frac{1}{12} t^6 + C$
4. Rücksubstituieren: $-\frac{1}{12} t^6 + C = -\frac{1}{12} (1 - 2x)^6 + C$

5. Probe: $\frac{d}{dx}[-\frac{1}{12}(1-2x)^6+C] = -\frac{6}{12}(1-2x)^5(-2) = (1-2x)^5$

Übungen 3.5.1.

a) $\square$	*b)* $\square$	*c)* $\square$
d) $\square$	*e)* $\square$	*f)* $\square$

3.5.2 Integration bei Ableitung des Nenners im Zähler

Ist der Zähler des Integranden exakt die Ableitung des Nenners, so gilt

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C,$$

wobei mittels $f(x) = t$ und $f'(x)\ dx = dt$ substituiert wurde.

Beispiel. $\int \tan x\ dx = -\int \frac{-sinx}{cosx} = -\ln|\cos x| + C.$

Übungen 3.5.2.

a) $\square$	*b)* $\square$	*c)* $\square$
d) $\square$	*e)* $\square$	*f)* $\square$

3.5.3 Partielle Integration

Ist der Integrand aus zwei oder mehreren Funktionen multiplikativ zusammengesetzt und kann die Ableitung einer dieser Funktionen den Integrand vereinfachen kann versucht man die *Partielle Integration*

$$\int u'v\ dx = uv - \int uv'\ dx,$$

anzuwenden, wobei u und v die zu substituierenden Funktionen sind.

Beispiel. $\int 6x^2 \cdot \ln|x|\ dx$. Lösung:

$$\int \underbrace{6x^2}_{u'} \cdot \underbrace{\ln|x|}_{v}\ dx = \underbrace{2x^3}_{u} \cdot \underbrace{\ln x}_{v} - \int \underbrace{2x^3}_{u} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{v'}\ dx = 2x^3 \ln|x| - x^3 + C.$$

Übungen 3.5.3.

a) $\square$	*b)* $\square$	*c)* $\square$
d) $\square$	*e)* $\square$	*f)* $\square$

3.5.4 Integration rationaler Funktionen

Die Integration rationaler Funktionen führt mittels Umformung wie Partialbruchzerlegung auf schon bekannte Integrale aus Formelsammlungen.

Beispiel. $\int \frac{1}{x^2+3x+5}dx$. Lösung: Es gilt

$$\int \frac{1}{X}dx = \frac{2}{\sqrt{\Delta}} \arctan \frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}, \;\; \Delta > 0,$$

mit $\Delta = 4ac - b^2$ und mit $X = ax^2 + bx + C$. Es folgt mit $a = 1, b = 3, c = 5$ und somit $\Delta = 11$:

$$\int \frac{1}{x^2+3x+5}dx = \frac{2}{\sqrt{11}} \arctan \frac{2x+3}{\sqrt{11}} + C$$

Übungen 3.5.4.

a) $\square$	*b)* $\square$	*c)* $\square$
d) $\square$	*e)* $\square$	*f)* $\square$

3.5.5 Integration von Wurzeln im Integranden

Treten Wurzelausdrücke im Integranden auf, bzw. hat der Integrand $\mathcal{R}$ die Form

$$\mathcal{R}(x, \sqrt[m]{\frac{px+q}{rx+s}})dx,$$

so gibt es die Standardsubstitution

$$t = \sqrt[m]{\frac{px+q}{rx+s}}.$$

Es folgt

$$x = \frac{st^m - q}{p - rt^m}$$

und

$$dx = mt^{m-1}\frac{sp-rq}{(p-rt^m)^2}dt$$

Beispiel. $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$. Lösung: Hier ist $\mathcal{R} = \mathcal{R}(x, \sqrt[m]{\frac{px+q}{rx+s}})$. Substitution ist

$$t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \Rightarrow x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ t^2 = \frac{1-x}{1+x}$$

und

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-4t}{(1+t^2)^2} \Rightarrow dx = \frac{-4t}{(1+t^2)^2}dt.$$

Es folgt Substituieren und Ausrechnen:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = \int \frac{1+t^2}{1-t^2}t\frac{-4t}{(1+t^2)^2}dt \\
&= \int \frac{-4t^2}{(1-t^2)(1+t^2)}dt \\
&= \int \frac{4t^2}{(t^2-1)(t^2+1)}dt \\
&= \int \frac{4t^2}{(t-1)(t+1)(t^2+1)}dt \\
&\overset{*}{=} \int (\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} + \frac{2}{t^2+1})dt \\
&= \ln|t-1| - \ln|t+1| + 2\arctan t + C = \ln|\frac{t-1}{t+1}| + 2\arctan t + C \\
&= \ln|\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}| + 2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C,
\end{aligned}$$

wobei $*$ mit Partialbruchzerlegung erreicht wurde.

Übungen 3.5.5.

$a)$ □	$b)$ □	$c)$ □
$d)$ □	$e)$ □	$f)$ □

3.5.6 Integration über trigonometrische Funktionen

Besteht der Integrand $\mathcal{R}$ aus trigonometrische Funktionen, insbesondere wenn

$$\mathcal{R}(\sin x, \cos x)$$

so wird die Standardsubstitution $t = \tan \frac{x}{2}$. Durch Umformen erhält man

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

und

$$dx = \frac{2}{1+t^2} dt.$$

Diese Substitution löst alle Integrale dieser Art für trigonometrische Funktionen. Neben der Standardsubstitution $\tan \frac{x}{2}$ gibt es altenativ folgende Ansätze:

- $\mathcal{R}(-\sin x, \cos x) = -\mathcal{R}(\sin x, \cos x) \Longrightarrow t = \cos x \Longrightarrow -\sin x \; dx = dt$
- $\mathcal{R}(\sin x, -\cos x) = -\mathcal{R}(\sin x, \cos x) \Longrightarrow t = \sin x \Longrightarrow \cos x \; dx = dt$

Beispiel. $\int \frac{1}{\cos x} dx$. Lösung: Integrand vom Typ $\mathcal{R}(\sin x, \cos x)$. Substitution: $\tan \frac{x}{2} = t, \quad \cos x = \frac{1-t}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\cos x} dx &= \int \frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt \\
&= \int \frac{(1+t^2)2}{(1-t^2)(1+t^2)} dt \\
&= 2 \int \frac{1}{1-t^2} dt.
\end{aligned}$$

Es gilt:

$$\int \frac{1}{1-t^2} dt = \tanh^{-1} t, \quad |t| < 1$$

und

$$\int \frac{1}{1-t^2} dt = \coth^{-1} t, \quad |t| > 1.$$

Rücksubstitution: $t = \tan \frac{x}{2}$ führt auf:

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \tanh^{-1}(\tan \frac{x}{2}), \quad |\tan \frac{x}{2}| < 1$$

oder

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \coth^{-1}(\tan \frac{x}{2}), \quad |\tan \frac{x}{2}| > 1.$$

Übungen 3.5.6.

a) □	*b*) □	*c*) □
d) □	*e*) □	*f*) □

4 Differenzialgleichungen

4.1 Gewöhnliche Diffenrenzialgleichung

Im folgenden werden *gewöhnliche Differentialgleichungen* betrachtet.

Definition. Eine gewöhnliche Differentialgleichung (DGL) ist eine Gleichung, die eine abhängige Variable $y(x)$, eine unabhängige Variable x, sowie Ableitungen der abhängigen Variable enthält:

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0.$$

Die *Ordnung* einer DGL ist die Ordnung der höchsten auftretenden Ableitung.

Beispiele. Eine DGL erster Ordnung ist beispielsweise die *Wachstumsgleichung*

$$y' = -\alpha y$$

mit einer spezifischen Konstante α. Die Differentialgleichung

$$y'' + y = 0$$

ist eine DGL zweiter Ordnung.

Man bezeichnet $f(x) = y$ als eine Lösung der DGL sind, wenn beim Einsetzen von y in die DGL die Gleichung gelöst wird. Wir setzen voraus, das bei den hier folgenden Differentialgleichungen Lösungen existieren (s. Existenzsätze).

Sind bei einer beliebigen *DGL* zusätzlich sogenannte *Anfangsbedingungen* vorgegeben, derart daß

$$y_1(x_0) = a_1,\ y'(x_0) = a_2,\ \dots,\ y^{(n)}(x_0) = a_n,$$

so spricht man von einer *Anfangswertaufgabe* (AWA). Um eine AWA exakt lösen zu können benötigt man für eine *DGL* $n$ter Ordnung n Anfangsbedingungen.

Beispiel: $y' = -\frac{y}{x}$, mit Anfangsbedingung $y(1) = 23$. Lösung:

$$y(x) = \frac{C}{x}$$

löst die *DGL*, da $y'(x) = -\frac{C}{x^2}$. Also ist die Lösung für die Anfangswertaufgabe

$$y(x) = \frac{27}{x},$$

unter der Anfangsbedingung $y(1) = 27$.

Beispiel. Die *DGL* erster Ordnung

$$y'^2 + y^2 = 1$$

hat die Lösung $f(x) = y = \sin x + C$, da

$$[\sin(x + C)']^2 + [\sin x]^2 = 1.$$

Man beachte, das $y = \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$ ebenfalls die Gleichung löst.

Übungen 4.1.

a) ☐	*b*) ☐	*c*) ☐
d) ☐	*e*) ☐	*f*) ☐

4.2 Klassifzierung

Definition. Eine *DGL* heißt *linear*, wenn die abhängigen Variablen und Ihre Ableitungen nur in erster Potenz vorkommen. (d.h. weder y'^2, y''^4 etc..). Die lineare *DGL* $n - ter$ Ordnung kann also als

$$\sum_{i=0}^{n} p_i(x) y^{(i)}(x) = q(x)$$

geschrieben werden. Hier kennzeichnet $y^{(i)}$ die $i-te$ Ableitung von y. Ist

$$q(x) = 0,$$

so nennt man die *DGL homogen*, für $q(x) \neq 0$ *inhomogen*. Ist

$$p_i(x) = p_i =: a_i,$$

d.h sind alle Koeffizienten $p_i(x)$ nicht von x abhängig, so nennt man die *DGL* eine *DGL* mit *konstanten Koeffizienten*. Eine *DGL*

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)})$$

heißt *implizite DGL*, eine *DGL* der Form

$$y^{(n)} = f(x, y', ..., y^{(n-1)})$$

heißt *explizite DGL*. Eine *DGL* bei der Anfangswerte $y(c), y'(c), ..., y^{(n)}(c)$ vorgegeben sind heißt *Anfangswertaufgabe* (AWA).

Beispiele. (i) $y'^2 + y^2 = 1$ ist eine nicht-lineare inhomogene *DGL* erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten (implizit).
(ii) $y''' - 2y'' - 5xy' + 5y = 0$ ist eine lineare homogene *DGL* dritter Ordnung (ohne konstante Koeffizienten, implizite *DGL*).

Übungen 4.2.

a) ☐	*b)* ☐	*c)* ☐
d) ☐	*e)* ☐	*f)* ☐

4.3 Lösungsverfahren

Gewöhnliche Differenzialgleichungen der Ordnung n lassen sich stets auch auf ein System von gewöhnlichen Differenzialgleichungen erster Ordnung zurückführen. Die Lösungen dieser werden als *Basislösungen* bezeichnet. Eine schematische Darstellung findet sich im Abschnitt *Lineare DGL's mit konstanten Koeffizienten*. Darüber hinaus gibt es spezielle Typen von *DGL's*, bei denen sich bestimmte Lösungsansätze anbieten.

4.3.1 Trennung der Variablen

Liegt eine *DGL* erster Ordnung der Form

$$y' = f(x)g(y)$$

vor, kann diese mittles *Trennung der Variablen* durch

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\ dx,$$

für $g(y) \neq 0$ gelöst werden.

Beispiel: $y' + \frac{x}{y} = 0$. Lösung: Es ist

$$f(x) = x, \quad g(y) = \frac{1}{y},$$

da

$$y' + \frac{x}{y} = 0 \Longleftrightarrow y' = -x\frac{1}{y}.$$

Es folgt mit $y' = \frac{dy}{dx}$ für $y \neq 0$:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Longleftrightarrow \int y\ dy = -\int x\ dx,$$

mit Lösung

$$\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}x^2 + C, bzw \ \ y^2 = -x^2 + c.$$

Die Lösungen können (immer) auch graphisch dargestellt werden, hier stellt $y^2 + x^2 = c$ die Gesamtheit von Kreisen um den Ursprung dar, die an der Stelle $y = 0$ (an der $x-$Achse) nicht definiert sind.

Übungen 4.3.1

$a) \square$	$b) \square$	$c) \square$
$d) \square$	$e) \square$	$f) \square$

4.3.2 Die Bernoulli DGL

DGL's der Form

$$y' + f(x)y = r(x)y^a$$

für $a \neq 1$ und für $a \neq 1$ heißen *Bernoulli DGL's* und lassen sich mittels

$$u = y^{1-a}$$

und

$$u' = (1-a)y^{-a}y'$$

zu einer linearen *DGL* (erster Ordnung) umformen:

$$u` + (1-a)f(x)u = (1-a)r(x).$$

Beispiel: $xy' - 4y = x^2y^3$. Lösung:

$$xy' - 4y = x^2y^3 \Longleftrightarrow y' - 4\frac{y}{x} = xy^3.$$

Dieses ist die Form der Bernoulli *DGL* mit $a = 3$. Substitution führt auf

$$u' + \frac{8}{x}u = -2x \Longrightarrow u = \frac{C}{x^8} - \frac{1}{5}x^2.$$

Da $u = y^{-2} = \frac{1}{y^2}$ erhält man die Lösung

$$y = \pm\frac{\sqrt{5}x^4}{\sqrt{5C - x^{10}}},$$

für $5C - x^{10} > 0$.

Bemerkung. Weitere nichtlineare *DGL's* die auf lineare *DGL's* zurückgeführt werden können sind die **Ricatti** *DGL*

$$y' + f(x)y = r(x) + g(x)y^2$$

und die **Ähnlichkeits** *DGL*

$$y' = f(\frac{x}{y}).$$

Bemerkung. Differentialgleichungen, wie viele nichtlineare *DGL's* und *DGL's* höherer Ordnung sind oft schwierig und oft nur numerisch lösbar (sofern sie

Lösungen besitzen !). Einen Sonderfall bilden die *linearen DGL's mit konstanten Koeffizienten n-ter Ordnung*, die immer gelöst werden können.

Übungen 4.3.2

a) □	*b)* □	*c)* □
d) □	*e)* □	*f)* □

4.4 Die lineare *DGL* mit konstanten Koeffizienten

Wir betrachten die *homogene lineare DGL mit konstanten Koeffizienten n-ter Ordnung*: [3]

$$a_0y + a_1y' + a_2y'' + ... + a_{n-1}y^{(n-1)} + y^n = 0.$$

Als Lösungsansatz wird $y = e^{\lambda x}$ gewählt, so daß $y' = \lambda e^{\lambda x},\ y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}, ...$ ist. Wir ersetzen die Terme und erhalten das sogenannte *charakteristische Polynom*

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda + ... + a_1\lambda + a_0 = 0,$$

wobei $\lambda \in \mathbb{C}$. Das charakteristische Polynom n-ten Grades hat nach dem *Fundamentalsatz der Algebra* genau n reelle oder komplexe Nullstellen. Diese Nullstellen hängen mit sogenannten *Basislösungen* der *DGL* zusammen.

Um die Nullstellen des charakteristischen Polynoms zu berechnen, setzt man zur Lösung der *DGL* die dazu gehörigen Basislösungen in die *DGL* ein. Im folgenden sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms und die dazugehörigen Basislösungen aufgeführt.

Nullstellen	Basislösungen der DGL
$\lambda \in \mathbb{R}$, eine reelle Nullstelle $\lambda \in \mathbb{R}$, k reelle Nullstellen	$e^{\lambda x}$ $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, x^2e^{\lambda x}, ..., x^{k-1}e^{\lambda x}$
$\lambda \in \mathbb{C}$, eine komplexe Nullstelle (paarweise konjugiert komplex: $\lambda = a \pm ib$)	$e^{ax}\cos bx$, $e^{ax}\sin bx$
$\lambda \in \mathbb{C}$, k komplexe Nullstellen (paarweise konjugiert komplex: $\lambda = a \pm ib$)	$(e^{ax}\cos bx,\ e^{ax}\sin bx),(xe^{ax}\cos bx,\ xe^{ax}\sin bx),$ ... $,(e^{ax}\cos bx,\ e^{ax}\sin bx),(x^{k-1}e^{ax}\cos bx,\ x^{k-1}e^{ax}\sin bx)$

[3] bereits nach y^n aufgelöst, d.h. dividiert durch a_n

Hier treten die komplexen Nullstellen immer paarweise *konjugiert komplex* auf. Im folgenden sind einige Beispiele für die Nullstellen λ der charakteristischen Gleichung und die zugehörigen Basislösungen aufgeführt:

Nullstellen λ	Basislösungen
$1,\ -4,\ 5,\ \sqrt{8}+1$	$e^{1x},\ e^{-4x},\ e^{5x},\ e^{(\sqrt{8}+1)x}$
$0,\ 0,3,\ 3,\ 3$	$1,\ x,\ e^{3x},\ xe^{3x},\ x^2e^{3x}$
$100, 2 \pm 3i$	$e^{100x},\ e^{2x}\cos 3x,\ e^{2x}\sin 3x$
$1 \pm 2i,\ 1 \pm 2i$	$e^{1x}\cos 2x,\ e^{1x}\sin 2x,\ xe^{1x}\cos 2x,\ xe^{1x}\sin 2x$
$0,\ 0,\ 0,\ \pm i,\ \pm i,\ \pm i$	$1,\ x,\ x^2,\ \cos x,\ \sin x,\ x\cos x,\ x\sin x,\ x^2\cos x,\ x^2\sin x$

Beispiel: $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 0$. Lösung: Die lineare homogene *DGL* dritter Ordnung mit konstanten Koeffizienten wird zum charakteristischen Polynom umgeformt:

$$y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 0 \Longrightarrow \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$$

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = 3.$$

Daraus folgen die Basislösungen:

$$y_1 = e^x,\ y_2 = e^{-2x},\ y_3 = e^{3x}.$$

Die Lösungsbasis (d.h. die Lösung) der *DGL* besteht aus der Linearkombination der Basislösungen:

$$y = c_1e^x + c_2e^{-2x} + c_3e^{3x}.$$

Bemerkung. Durch drei mögliche Anfangsbedingungen, $y'''(x_0) = a_3,\ y''(x_0) = a_2$ und $y'(x_0) = a_0$ können die Konstanten c_3, c_2, c_1 bestimmt und damit eine Lösung der *DGL* erhalten werden.

Übung 4.4.

a) ☐	*b)* ☐	*c)* ☐
d) ☐	*e)* ☐	*f)* ☐